

UNIVERSIDAD LABORAL DE ALCALÁ DE HENARES

ESCUELA UNIVERSITARIA DE

INGENIERÍA TÉCNICA DE TELECOMUNICACIÓN

Especialidad: EQUIPOS ELECTRÓNICOS

1972-1975

SISTEMAS REALIMENTADOS DE CONTROL

SERVOSISTEMAS LINEALES. MÉTODO DE EVANS

METODO DE EVANS.-

INTRODUCCION.-

El problema fundamental de los servosistemas lineales se puede resumir así:

Dadas las funciones de transferencia de la cadena abierta $G(s)$ y $H(s)$, determinar la función de transferencia en cadena cerrada $C(s)/R(s)$ que permita evaluar las características de funcionamiento del sistema completo.

De la misma manera, en el proceso de proyecto, el problema se puede enunciar así:

Dada la función de transferencia en cadena cerrada deseada, determinar la correspondiente función de transferencia en cadena abierta del sistema.

En cualquier caso, es interesante estudiar las relaciones entre las funciones de transferencia en cadena abierta y en cadena cerrada de un servosistema dado.

Como ejemplo, consideremos que la función de transferencia en cadena abierta de un servosistema con retorno unitario sea

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)} \qquad K \text{ y } a = \text{constantes} \qquad (1)$$

La función de transferencia en cadena cerrada, será

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+a)}}{1+\frac{K}{s(s+a)}} = \frac{K}{s^2+as+K} \qquad (2)$$

Es evidente que el sistema será inestable si a ó K ó los dos son negativos. La determinación de los valores de a y K de manera que el sistema total sea óptimo con respecto a algún criterio de funcionamiento constituye un sencillo ejemplo de diseño.

(2) Puesto que el comportamiento dinámico del sistema depende de las raíces de la ecuación característica, es interesante estudiar la variación de dichas raíces en función de a y K.

Para simplificar el problema supongamos que a=2 y K puede tomar valores de $-\infty$ a $+\infty$. Entonces, tenemos:

$$s^2+as+K = s^2+2s+K = 0 \qquad (3)$$

de donde

$$s_1, s_2 = -1 \pm \sqrt{1-K}$$

Situación de las raíces según el valor K:

(1) $-\infty < K < 0$: las dos raíces son reales.

(2) $K=0$: $s_1=0$, $s_2=-2$

(3) $0<K<1$: las dos raíces son números reales negativos.

(4) $K=1$; Raíz doble $s_1=s_2=-1$

(5) $1<K<\infty$: las dos raíces son complejas conjugadas.

En la figura 1 se da el lugar de las dos raíces cuando K varía entre $-\infty$ y $+\infty$.

Fig. 1

De este lugar de las raíces obtenemos las siguientes informaciones acerca del comportamiento dinámico del sistema.

(1) Estabilidad:

El sistema en cadena cerrada es inestable para los valores de K negativos.

(2) Respuesta transitoria

(a) Para los valores de K comprendidos entre 0 y 1, el sistema es sobreamortiguado ($\zeta > 1$); para $1<K<\infty$ el siste-

3 ma es infraamortiguado u oscilatorio ($\zeta < 1$). El amortiguamiento crítico ($\zeta = 1$) se tiene para $K = 1$.

(b) La frecuencia propia no amortiguada ω_n aumenta con K.

(c) Para todos los valores de $K \geq 1$ el tiempo de respuesta a una entrada en escalón es constante, puesto que las partes reales de las dos raíces son fijas.

(d) Respuesta en frecuencia.-

Para un valor dado de K, las raíces S_1 y S_2 de la ecuación característica se determinan sobre la fig 1 y la función de transferencia en cadena cerrada es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(S-S_1)(S-S_2)}$$

El diagrama de la figura 1 se conoce como el lugar de las raíces de la ecuación (3) cuando K es un parámetro variable. Esta técnica fué descubierta por Evans en 1948, del cual ha tomado el nombre.

En los problemas de los sistemas de control, el lugar de las raíces se define como el lugar geométrico de los polos de la función de transferencia en cadena cerrada (o raíces de la ecuación característica) cuando uno ó varios parámetros de la función de transferencia en cadena abierta varían de $+\infty$ a $-\infty$. Cuando hay un solo parámetro variable como el K del ejemplo y K varía solamente entre 0 y $+\infty$ el diagrama se llama lugar de las raíces. Cuando K varía entre 0 y $-\infty$, el diagrama se denomina lugar inverso de las raíces. Cuando se considera más de un parámetro como variable, recibe el nombre de contornos de raíces.

1. Lugar de las raíces. Definición.-

Consideremos un sistema realimentado cuya función de transferencia en cadena cerrada sea:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \qquad (4)$$

Las raíces de la ecuación característica se determinan por

$$1 + G(s)H(s) = 0 \qquad (5)$$

$$G(s)H(s) = -1 \qquad (6)$$

Que se verifica si se cumple que

$$|G(s)H(s)| = 1 \qquad (7)$$

y

$$\angle G(s)H(s) = (2K+1)\pi \qquad (8)$$

donde $K = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

$G(s)H(s)$ es una función de la forma:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2) \cdots (s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2) \cdots (s+p_{m+n})} \qquad (9)$$

Las dos condiciones dadas en (7) y (8) se convierten en:

$$|G(s)H(s)| = \frac{|K| \prod_{i=1}^{m} |s+z_i|}{\prod_{j=1}^{m+n} |s+p_j|} = 1 \qquad (-\infty < K < \infty) \qquad (10)$$

y

$$\angle G(s)H(s) = \angle K + \sum_{i=1}^{m} \angle s+z_i - \sum_{j=1}^{m+n} \angle s+p_j = (2K+1)\pi \qquad (11)$$

Así pues, una rama del lugar de las raíces correspondiente al sistema de la ecuación (4) es un lugar geométrico de valores s del plano s, cuando K varía de 0 a $+\infty$.

En otras palabras, un punto s_1 del plano s es un punto del lugar de las raíces si satisface las siguientes condiciones

$$\frac{|K| \prod_{i=1}^{m} |s_1+z_i|}{\prod_{j=1}^{m+n} |s_1+p_j|} = 1 \qquad |-\infty < K < \infty| \qquad (12)$$

y

$$\sum_{i=1}^{m} \angle s_1+z_i - \sum_{j=1}^{m+n} \angle s_1+p_j = (2K+1)\pi \qquad (0 < K < \infty) \qquad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \angle s_1+z_i - \sum_{i=1}^{m+n} \angle s_1+p_i = 2K_1\pi \qquad (-\infty<K<0) \qquad (14)$$

$$K_1 = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Por ejemplo, sea

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)}{s(s+p_2)(s+p_3)} \qquad (15)$$

(Fig 2)

Supongamos que los polos y ceros de $G(s)H(s)$ están situados como indica la fig. 2. Sea s_1 un punto cualquiera del plano s y dibujemos los vectores dirigidos desde los polos y ceros de $G(s)H(s)$ al punto s_1. Si s_1 es un punto del lugar de las raíces $(0<K<\infty)$ del sistema en cadena cerrada, debe satisfacer las dos condiciones

$$\frac{|K|\,|s_1+z_1|}{|s_1|\,|s_1+p_2|\,|s_1+p_3|} = 1 \qquad (16)$$

y

$$\angle s_1+z_1 - (\angle s_1 + \angle s_1+p_2 + \angle s_1+p_3) = (2K_1+1)\pi \qquad (17)$$

Si s_1 es un punto del lugar inverso de las raíces, debe cumplirse la ecuación (16) y

$$\angle s_1+z_1 - (\angle s_1 + \angle s_1+p_2 + \angle s_1+p_3) = 2K_1\pi \qquad (18)$$

Los factores $|s_1+z_1|$, $|s_1+p_2|$, $|s_1+p_3|$, $|s_1|$ son los módulos de los distintos vectores trazados entre s_1 y los distintos polos y ceros, representados en la fig 2 por A, B, C y D, por lo que la ecuación 16 se transforma en:

$$\frac{A}{BCD} = \frac{1}{|K|} \qquad (19)$$

Los ángulos θ_{z_1}, θ_{p_1}, θ_{p_2}, θ_{p_3} son los argumentos de los vectores medidos a partir del eje real positivo. De las ecuaciones (17) y (18) se deduce que:

$$\theta_{z_1} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3}) = (2K_1+1)\pi \qquad (0 < K < \infty) \qquad (20)$$

y

$$\theta_{z_1} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3}) = 2K_1\pi \qquad (-\infty < K < 0) \qquad (21)$$

En consecuencia, dada la configuración de los polos y ceros de $G(s)H(s)$, la construcción del lugar de las raíces del sistema en cadena cerrada implica los dos pasos siguientes:

(1) La determinación de los puntos del plano S que satisfacen la condición dada por la ecuación (17).

(2) La determinación del valor de K $(-K)$ en cada punto S_1 del plano S del lugar de las raíces (lugar inverso de las raíces) mediante la relación dada por la ecuación (16).

En el próximo apartado se indicarán algunos métodos prácticos para la determinación de estos lugares de las raíces.

2. Construcción del lugar de las raíces.-

Las siguientes reglas de construcción se deducen de la relación entre polos y los ceros de $G(s)H(s)$ y las raíces de la ecuación característica. Estas reglas deben considerarse solamente como ayuda a la construcción del lugar de las raíces; no dan el lugar exacto.

(1) Puntos de origen del lugar de las raíces $(K=0)$

Los puntos de origen del lugar de las raíces $(K=0)$ son los polos de $G(s)H(s)$.

Demostración: La ec. (10) puede escribirse

$$\frac{\prod_{i=1}^{m} |s+z_i|}{\prod_{j=1}^{n+l} |s+p_j|} = \frac{1}{|K|} \qquad (22)$$

Cuando K tiende a cero, el valor de la Ec.(22) tiende a infinito y, por lo tanto s tiende hacia los polos de $G(s)H(s)$; es decir $s \to p_i$. Es evidente que esta propiedad se aplica por igual al lugar de las raíces y al lugar inverso de las raíces.

(2) Puntos terminales del lugar de las raíces ($K = \pm\infty$)

Los puntos terminales del lugar de las raíces son los ceros de $G(s)H(s)$.

Demostración: Considerando de nuevo la Ec.(22), cuando $K \to \pm\infty$, la ecuación tiende a cero, lo que implica que s tiende hacia los ceros de $G(s) \cdot H(s)$.

(3) Número de ramas separadas.

Sea N = número de ramas separadas

Z = " " ceros finitos de $G(s)H(s)$

P = " " polos " " "

Entonces

$$N = Z \quad \text{si} \quad Z > P$$

y

$$N = P \quad \text{si} \quad P > Z$$

Puesto que las ramas del lugar de las raíces deben iniciarse en un polo y terminar en un cero de $G(s)H(s)$, el lugar de las raíces tendrá tantas ramas como el mayor valor de Z y P.

(4) Simetría del lugar de las raíces

El lugar de las raíces y el lugar inverso de las raíces son simétricos respecto al eje real del plano s.

La demostración de esta propiedad es trivial, puesto que las raíces complejas de las funciones racionales deben aparecer en forma de pares de raíces complejas.

(5) Asíntotas del lugar de las raíces.

Para valores elevados de S, el lugar de las raíces es asintótico a líneas rectas cuyos ángulos con la parte positiva del eje real son

$$\theta_{K_1} = \frac{(2K_1+1)\pi}{P-Z} \qquad (23)$$

donde $K_1 = 0, 1, 2 \ldots$ hasta $K_1 = P-Z$ (exclusive)

Para el lugar inverso de las raíces

$$\theta_{K_1} = \frac{2K_1\pi}{P-Z} \qquad (24)$$

donde $K_1 = 0, 1, 2 \ldots$ hasta $K_1 = P-Z$ (exclusive)

Las propiedades de las asíntotas del lugar de las raíces en el infinito son importantes, puesto que cuando $P \neq Z$, $P-Z$ del lugar tenderá a infinito en el plano S cuando S crezca indefinidamente.

(6) Intersección de las asíntotas (centroide)

(a) La intersección de las $n = P-Z$ asíntotas tiene lugar solamente en el eje real.

(b) La intersección de las asíntotas (centroide) en el eje real viene dada por:

$$\sigma_1 = -\left(\frac{b_1-a_1}{n}\right) = \frac{\sum \text{polos de } G(s)H(s) - \sum \text{ceros de } G(s)H(s)}{P-Z} \qquad (25)$$

(7) Lugar de las raíces en el eje real.

Lugar de las raíces (K positiva): Un punto del eje real puede pertenecer al lugar de las raíces sólo si el número total de polos y ceros de $G(S)H(S)$ situados a su derecha es impar.

Lugar inverso de las raíces (K negativa): Un punto del eje real puede pertenecer al lugar inverso de las raíces sólo si el número total de polos y ceros de $G(S)H(S)$ situados a su derecha es par.

(8) Ángulos de salida (de los polos) y ángulos de llegada (a los ceros) del lugar de las raíces).

El ángulo de salida del lugar de las raíces (K positiva) de un polo (ó el ángulo de llegada a un cero) de $G(s)H(s)$ puede determinarse suponiendo un punto s_1 muy próximo al polo (o cero), que pertenece a la rama asociada al polo (o cero) y aplicando la siguiente ecuación

$$\angle G(s_1)H(s_1) = \sum_{i=1}^{m} \angle s_1+z_i - \sum_{j=1}^{n} \angle s_1+p_j = (2K_1+1)\pi \qquad (26)$$

Una vez calculado el ángulo del lugar de las raíces en el polo ó cero, el ángulo del lugar inverso de las raíces en el mismo punto difiere del calculado en 180°.

(9) Intersección del lugar de las raíces con el eje imaginario.

Los puntos en que el lugar de las raíces y el lugar inverso de las raíces cortan al eje imaginario del plano S y los correspondientes valores de K se obtienen normalmente por aplicación del criterio de Routh-Hurwitz.

(10) Puntos de separación (Puntos en silla de montar) del eje real del lugar de las raíces.

Los puntos del lugar de las raíces (y del inverso) correspondientes a raíces múltiples de la ecuación característica se denominan puntos de separación o puntos de silla de montar del lugar de las raíces.

Punto de sep.

$K=0$ $K=0$

Punto de sep.

$K\to\infty$ $K\to\infty$

Fig 3.

En la fig 3 se indican dos puntos de separación.

En un punto de separación pueden concurrir más de dos ramas del lugar de las raíces.

Las ramas del lugar de las raíces (ó de su inverso) deben llegar y salir de un punto de separación sobre el eje real formando ángulos de $180°/n$, donde n es el número de ramas que llegan y salen de dicho punto. La ninguna regla es válida para los puntos de separación complejos.

Los puntos de separación del lugar de las raíces se determinan buscando las raíces de $dK/ds = 0$, ó $dG(s)H(s)/ds = 0$ (condición necesaria solamente). Otra posibilidad para determinar los puntos de separación del lugar de las raíces (para todos los valores de K) es mediante la tabla del punto de separación utilizando los coeficientes de la ecuación característica $F(s) = 0$ y $F'(s)$ - (necesaria y suficiente)

(11) Cálculo del valor de K en el lugar de las raíces.

El valor absoluto de K en cualquier punto s_1 del lugar de las raíces o del lugar inverso se determina mediante la siguiente ecuación:

$$|K| = \frac{1}{|G(s_1)H(s_1)|} = \frac{\text{producto de las longitudes de todos los vectores trazados desde los polos de } G(s)H(s) \text{ a } s_1}{\text{producto de las longitudes de todos los vectores trazados desde los ceros de } G(s)H(s) \text{ a } s_1} \qquad (27)$$

3.- <u>Ejemplo de construcción del lugar de raíces.</u>

Como aplicación de todas las reglas enunciadas, supongamos que deseamos trazar el lugar de las raíces de un servosistema cuya función de transferencia en cadena abierta viene dada por

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)} \qquad (28)$$

El lugar de las raíces ($-\infty < K < \infty$) del sistema puede construirse por aplicación de las reglas:

(1) Los puntos del origen ($K=0$) del lugar son $s = 0, -5, -6, -1 \pm j$ que son los polos de $G(s)H(s)$

(2) Los puntos terminales ($K = \pm\infty$) del lugar son $s = -3, \infty, \infty, \infty, \infty$ que son los ceros de $G(s)H(s)$.

(3) Hay cinco ramas separadas del lugar de las raíces.

(4) El lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real

(5) Los ángulos de las asíntotas del lugar de las raíces son

$$\theta_{K_1} = \frac{(2K_1+1)}{P-Z}\pi$$

y los del lugar inverso

$$\theta_{K_1} = \frac{2K_1\pi}{P-Z}$$

donde $K_1 = 0, 1, 2 \ldots (P-Z)$ (exclusive), por tanto;

$P - Z = 5 - 1 = 4$ y $K_1 = 0, 1, 2, 3$

Por lo tanto las cuatro ramas del lugar que tienden a infinito para $K \to \infty$ deben hacerlo con ángulos de $45°$, $-45°$, $135°$, $-135°$, respectivamente. Los ángulos de las asíntotas del lugar inverso de las raíces cuando $K \to -\infty$ son $0°$, $90°$, $180°$, $270°$ respectivamente.

(6) La intersección de las asíntotas (centroide) viene dada por

$$\sigma_1 = \frac{\sum \text{polos de } G(s)H(s) - \sum \text{ceros de } G(s)H(s)}{P-Z} = \frac{(0-5-6-1+j-1-j)-(-3)}{4} = -2{,}5$$

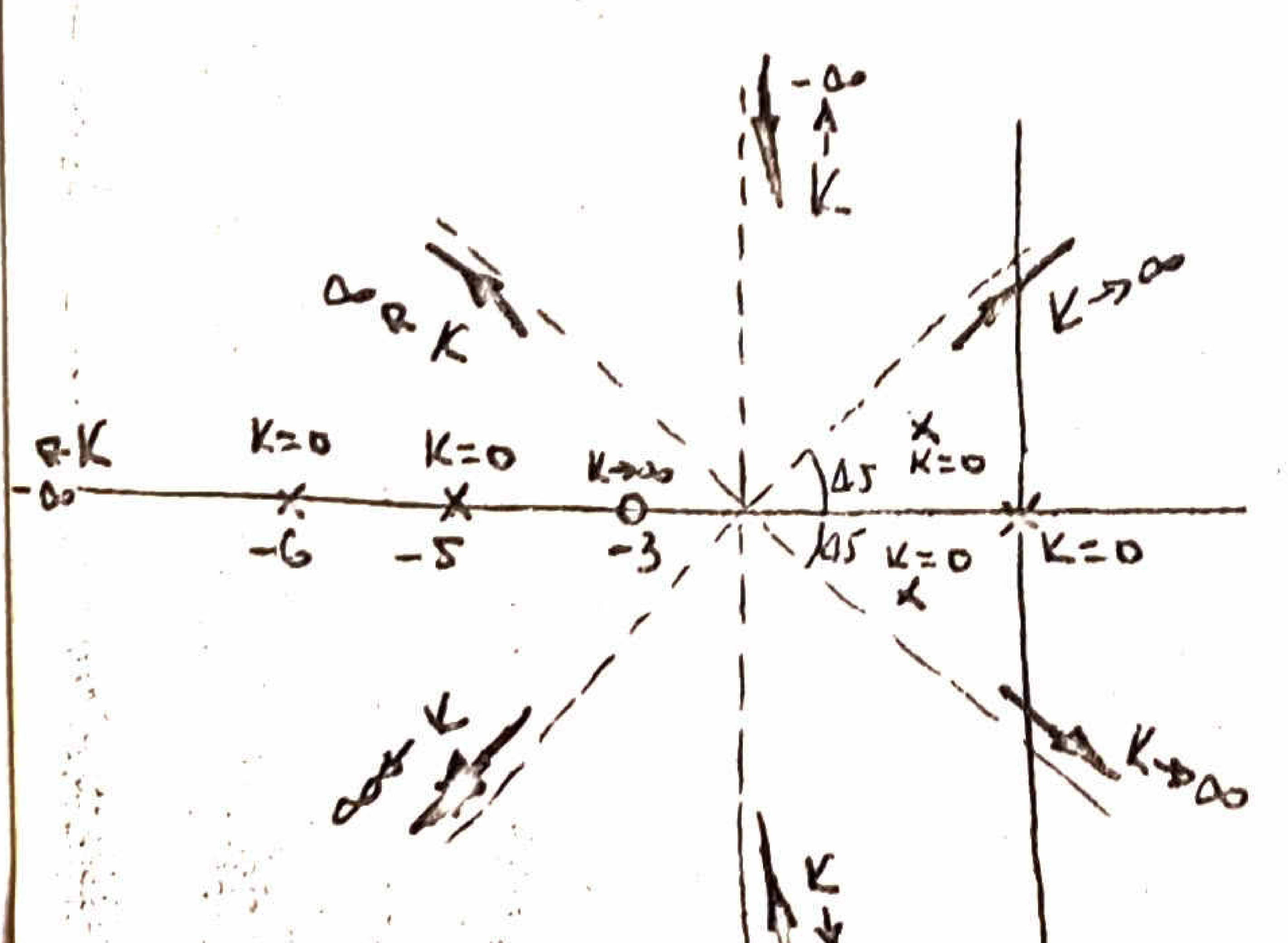
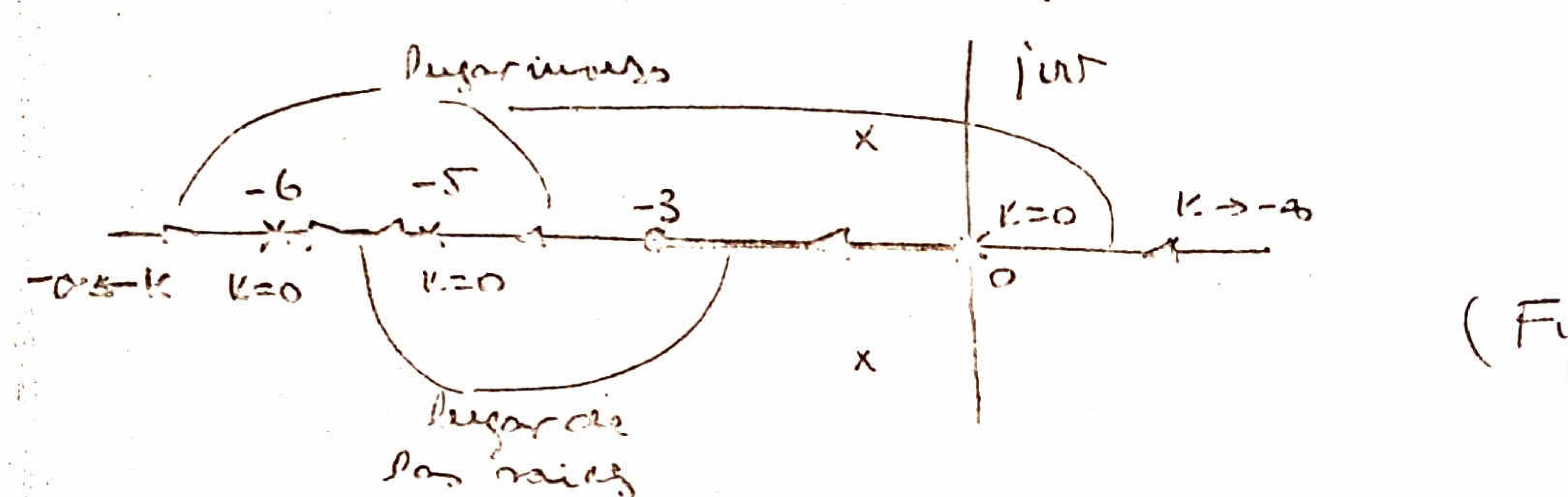


Fig 1

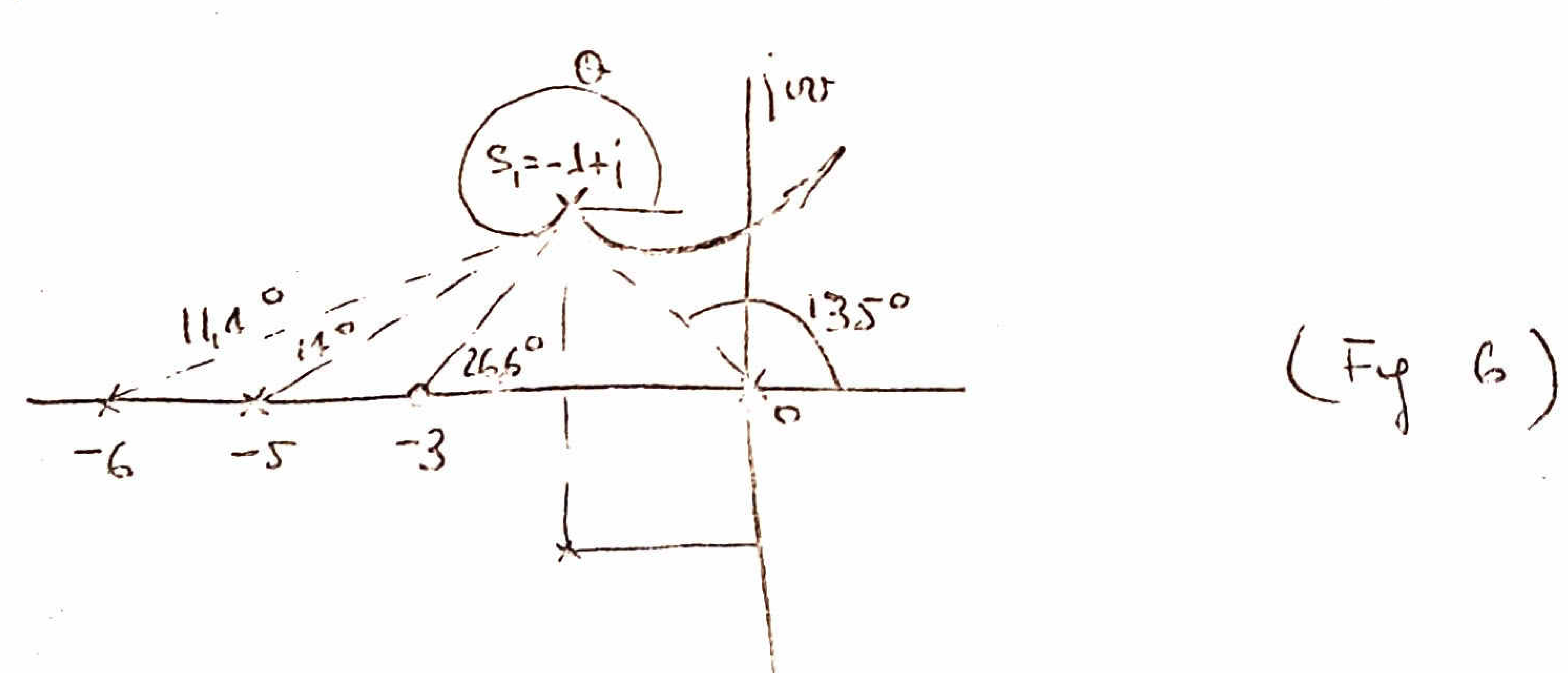
Los resultados obtenidos en estos seis últimos pasos están indicados en la figura 4.

(7) Lugar de las raíces sobre el eje real: Hay lugar de las raíces ($0 < K < \infty$) sobre el eje real entre $s=0$ y $s=-3$, $s=-5$ y $s=-6$; hay lugar inverso de las raíces ($0 > K > -\infty$) entre $s=-3$ y $s=-5$ y entre $s=-6$ y $s=-\infty$. (Fig 5)



(Fig 5)

(8) Ángulos de salida. - El ángulo de salida, θ del lugar de las raíces al salir del polo $-1+j$ se determina mediante la ecuación 11. Por consiguiente



(Fig 6)

$$26{,}6^\circ - (135^\circ + 90^\circ + 14^\circ + 11{,}4^\circ + \theta) = (2K+1)\pi \quad \Rightarrow \theta = -43{,}8^\circ$$

↑ $\angle s+3$ ↑ $\angle s$ ↑ $\angle s+1-j$ ↑ $\angle s+5$ ↑ $\angle s+6$ ↑ $\angle s+1+j$

(Ver fig 6)

(9) Intersección del lugar de las raíces con el eje imaginario.

Se determina mediante el criterio de Routh.

La ecuación característica del sistema es:

$$s^5 + 13s^4 + 54s^3 + 82s^2 + (60+K)s + 3K = 0 \qquad (29)$$

La tabla de Routh es

s^5	1	54	$60+K$
s^4	13	82	$3K$
s^3	$47,7$	$60+0,769K$	0
s^2	$65,6-0,212K$	$3K$	0
s^1	$\frac{3940-105K-0,163K^2}{65,6-0,212K}$	0	0
s^0	$3K$	0	0

Para un sistema estable se debe verificar

(a) $65,6-0,212\,K>0 \quad \Rightarrow \quad K<309$ (30)

(b) $3940-105K-0,163K^2>0 \quad \Rightarrow \quad K<35$ (raiz posit.) (31)

(c) $K>0$

Así pues el sistema es estable para $Q<K<35$. y el valor de K cuando el lugar de las raices corta el eje imaginario es 35. La frecuencia de la intersección se determina mediante la ecuación auxiliar

$$A(s) = (65,6-0,712K)s^2+3K=0 \qquad K=35, \text{ por lo que}$$

$$58,2\,s^2+105=0 \quad \Rightarrow \quad s=\pm j\,1,35$$

(10) Puntos de separación. El punto ó los puntos de separación se obtienen aplicando la ecuación:

$$\frac{d\,[G(s)\,H(s)]}{ds}=0$$

En el ejemplo que contemplamos, ello quiere decir que

$$s^5+13,5s^4+66s^3+142s^2+123s+45=0 \quad \Rightarrow \quad s=-5,52$$

Solamente hay un punto de separación y es precisamente el hallado.

La información obtenida en los dos pasos precedentes nos permite trazar en la fig 7 el lugar....

completo de las raíces

$-\infty \leftarrow K$ K=0 K=0 K<0 K→∞ K>0 K<0 43,8° $\rightarrow K\rightarrow-\infty$

K>0 −6 −5 −3 K=0

$j\omega$ K→∞ K=35 −1+j −1−j −j 1,34

Este tema debe completarse con la lectura de los apartados 7-11, 7-12 y 7-13 del D'Azzo-Houpis.